

# Nilpotence dans les algèbres de Malcev\*

Côme J. A. BÉRÉ†, Nakelgbamba B. PILABRÉ‡  
and Moussa OUATTARA§

Laboratoire T. N. AGATA /UFR-SEA  
Département de Mathématiques / Université de Ouagadougou  
Adresse 03 B. P. 7021 Ouagadougou, Burkina Faso 03

May 27, 2016

## Abstract

The main result is to prove that if a Malcev algebra  $A$  is *right nilpotent* of degree  $n$ , then  $A$  is *strongly nilpotent* of degree less or equals to  $4n^2 - 2n + 1$ .

## Résumé

Nous prouvons que toute algèbre de Malcev  $A$  *nilpotente à droite* d'indice  $n$  est *fortement nilpotente* d'un indice inférieur ou égal à  $4n^2 - 2n + 1$ .

**Keywords.** *Algèbre de Malcev, nilpotent à droite, nilpotent, fortement nilpotent, indice.*

**2010 Mathematics Subject Classification :** 17D10

## 1 Introduction

Lorsque l'algèbre  $A$  est de Lie ou alternative, il est facile de montrer que pour un idéal  $B$ , les trois notions de nilpotence, à savoir :  $B$  est *nilpotent à droite*,  $B$  est *nilpotent* et  $B$  est *fortement nilpotent* sont équivalentes.

Pour certaines algèbres non associatives, ce n'est pas le cas. Une algèbre de Jordan peut posséder un idéal nilpotent qui n'est pas fortement nilpotent.

---

\*À la mémoire des Professeurs Akry Koulibaly et Artibano Micali.

†first author email: bere\_jean0@yahoo.fr

‡second author email: pilabrenb@yahoo.fr

§third author email: ouatt\_ken@yahoo.fr

De même l'algèbre de Leibniz de dimension deux est nilpotente à gauche et non nilpotente à droite ([2, Exemple 3. 2] ou [3, Exemple 3. 3]). Dans [4, 5] M. Gerlein et A. Micali, ont montré l'équivalence de ces trois notions pour un idéal  $B$  d'une algèbre de Malcev  $A$ . Cependant, certaines démonstrations comportaient quelques points d'ombres (voir [8]).

Grâce à l'introduction de nouveaux outils, nous montrons que si  $A$  est nilpotent à droite d'indice  $n$ , alors  $A$  est fortement nilpotent d'indice inférieur ou égal à  $4n^2 - 2n + 1$ .

Nous montrons aussi l'équivalence de ces trois notions pour un idéal  $B$  d'une algèbre de Malcev  $A$  qui est  $J_k$ -nil.

Nous commençons par un rappel de quelques définitions et exemple sur les algèbres de Malcev, puis dans la section 3 nous établissons quelques résultats sur les produits droits de longueurs  $n$ . La section 4 est dédiée à l'étude des produits droits de poids  $n$ . Dans la section 5, nous énonçons un théorème dans le cas d'un idéal  $J_k$ -nil. Puis nous montrons que les trois types de nilpotence sont équivalents pour une algèbre de Malcev  $A$  (cf. le corollaire 5.1).

## 2 Préliminaires

**Définition 2.1** *Par la suite, sauf mention expresse du contraire,  $K$  désignera un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et tout espace vectoriel sera de dimension finie sur  $K$ . Si  $A$  est une  $K$ -algèbre, non nécessairement associative, l'application  $K$ -trilinéaire  $J : A \times A \times A \longrightarrow A$  définie par  $(x, y, z) \longmapsto (xy)z + (yz)x + (zx)y$  est appelée le jacobien de  $A$ .*

*Soient  $U, V, W$  trois sous algèbres de  $A$ .  $J(U, V, W)$  est le sous espace vectoriel de  $A$  engendré par les éléments de la forme  $J(u, v, w)$  où  $u \in U$ ,  $v \in V$  et  $w \in W$ .*

*On dira que  $A$  est une algèbre de Malcev si l'une quelconque des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1.  $x^2 = 0$  pour tout  $x$  dans  $A$  et  $J(x, y, xz) = J(x, y, z)x$ , quel que soient  $x, y, z$  dans  $A$  ;
2.  $x^2 = 0$  pour tout  $x$  dans  $A$  et  $J(x, xy, z) = J(x, y, z)x$ , quel que soient  $x, y, z$  dans  $A$  ;
3.  $x^2 = 0$  pour tout  $x$  dans  $A$  et  $(xy)(xz) = ((xy)z)x + ((yz)x)x + ((zx)x)y$ , quels que soient  $x, y, z$  dans  $A$ .

*Il est clair que ces définitions et équivalences ne dépendent pas de la caractéristique de  $K$  mais si celle-ci est différente de 2, les conditions*

ci-dessus mentionnées sont encore équivalentes à la suivante :

4.  $x^2 = 0$  et  $(xz)(yt) = ((xy)z)t + ((yz)t)x + ((zt)x)y + ((tx)y)z$ , quels que soient  $x, y, z, t$  dans  $A$ .

Si la caractéristique de  $K$  est différente de 2, on a l'égalité (cf. [1]) :

5.  $J(x, y, z)t = J(t, x, zy) + J(t, y, xz) + J(t, z, yx)$ , quels que soient  $x, y, z, t$  dans  $A$ .

Si  $A$  est une  $K$ -algèbre, considérons l'algèbre notée  $A^-$  dont l'espace vectoriel sous-jacent coïncide avec  $A$  et dont la multiplication est définie par  $[x, y] = xy - yx$  pour  $x, y$  parcourant  $A$ . On vérifie sans peine, que si  $A$  est une algèbre associative, l'algèbre  $A^-$  est de Lie et si  $A$  est une algèbre alternative, l'algèbre  $A^-$  est de Malcev. De plus, le jacobien d'une algèbre de Lie étant nul, toute algèbre de Lie est de Malcev.

**Exemple 2.1** Soit  $A$  la  $K$ -algèbre de dimension 4 dont la table de multiplication relative à une base  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  s'écrit  $e_1e_2 = e_1 = -e_2e_1$ ,  $e_1e_3 = e_1 = -e_3e_1$ ,  $e_3e_1 = e_4 = -e_1e_3$ ,  $e_3e_2 = e_3 = -e_2e_3$ ,  $e_2e_4 = e_4 = -e_4e_2$  et tous les autres produits étant nuls. On vérifie que  $A$  est une algèbre de Malcev (par calcul direct), non de Lie si la caractéristique de  $K$  est aussi différente de 3 (car  $J(e_1, e_2, e_3) = -3e_4$ ). Si  $K$  est un corps de caractéristique 3, cette algèbre est de Lie.

On renvoie à [6, 7] pour les renseignements complémentaires concernant les algèbres de Malcev.

Trois types de nilpotence d'un idéal  $B$  d'une algèbre de Malcev  $A$  ont été introduits par A. Micali et Ch. Gerlein dans [4, 5]. Rappelons les :

**Définitions 2.2** Soit un idéal  $B$  d'une algèbre de Malcev  $A$ , on introduit les notations et terminologies suivantes :

Soit  $P$  un produit de  $m$  facteurs  $s_m, s_{m-1}, \dots, s_1$  distincts ou non, associés d'une manière quelconque et dont  $n$  ( $n \leq m$ ) ou plus de ses facteurs appartiennent à  $B$ . On dira que le produit  $P$  est de longueur  $m$  et de poids  $n$  relativement à  $B$  ou plus simplement que  $P$  est de longueur  $m$  et de poids  $n$  dans  $B$ . La longueur  $m$  de  $P$  sera notée  $\#(P)$  et son poids  $n$  relativement à  $B$  sera notée  $\#_B(P)$ .

Lorsque  $P = ((\dots((s_ms_{m-1})s_{m-2}\dots)s_3)s_2)s_1$  où l'association est faite à droite systématiquement, on dira que  $P$  est un produit droit et on écrira alors simplement  $P = s_ms_{m-1}s_{m-2}\dots s_1$ , sans parenthèses.

Soient  $S_1, S_2, \dots, S_p$  des produits droits. On peut en faire le produit à droite  $N = S_1S_2\dots S_p$ . On dira que  $N$  est un produit normal.

- $B^n$  le sous-espace vectoriel de l'algèbre  $A$  engendré par tous les produits droits de longueur  $n$  et de poids  $n$  relativement à  $B$ . Par convention, on posera  $B^0 = A$ . Et on dit que l'idéal  $B$  est nilpotent à droite s'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $B^n = \{0\}$ .

En particulier  $A^n$  est engendré par tous les produits droits de longueur  $n$  et c'est un idéal de l'algèbre  $A$ .

- $B^{\{n\}}$  le sous-espace vectoriel de  $A$  engendré par les produits de  $n$  éléments de  $B$  associés d'une façon quelconque. Et on dit que l'idéal  $B$  est nilpotent s'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $B^{\{n\}} = \{0\}$ .
- $B^{(n)}$  l'ensemble des sommes de produits d'éléments de  $A$  avec au moins  $n$  éléments de  $B$ . On voit que  $B^{(n)}$  est un idéal de  $A$  et on a  $A \supseteq B^{(1)} \supseteq B^{(2)} \supseteq \dots \supseteq B^{(n)} \supseteq \dots$  et  $B^{(i)}B^{(j)} \subseteq B^{(i+j)}$  quels que soient les entiers  $i, j \geq 1$ . On dit que l'idéal  $B$  est fortement nilpotent s'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $B^{(n)} = \{0\}$ .

D'une manière générale si  $A$  est une algèbre non associative qui n'est ni commutative, ni anticommutative, nous ajoutons la définition suivante :

Lorsque  $P = s_1(s_2(s_3(\dots s_{m-2}(s_{m-1}s_m))\dots))$  où l'association est faite à gauche systématiquement, on dira que  $P$  est un produit gauche.

- ${}^nB$  le sous-espace vectoriel de l'algèbre  $A$  engendré par tous les produits gauches de longueur  $n$  et de poids  $n$  relativement à  $B$ . Par convention, on posera  ${}^0B = A$ . Et on dit que l'idéal  $B$  est nilpotent à gauche s'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  ${}^nB = \{0\}$ .

En particulier si  $A$  est commutative ou anticommutative, on a  ${}^nB$  coïncide avec  $B^n$ .

La preuve qu'une algèbre  $A$  qui est nilpotente à droite est une algèbre fortement nilpotente donnée dans [4] n'est pas assez convainquante (cf. [8]). C'est pourquoi nous développons d'autres outils qui vont nous permettre de réécrire une preuve plus rigoureuse.

**Définition 2.3** Soit  $D$  un sous espace vectoriel d'une algèbre de Malcev  $A$ . Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 1. Notons  $D_{(A,k)} = D \underbrace{AAA \dots A}_{k \text{ facteurs}}$  le sous espace vectoriel engendré par tous les produits droits de la forme  $da_k \dots a_3a_2a_1$  où  $d \in D$  et  $a_i \in A$  pour tout entier  $i$ , tel que  $1 \leq i \leq k$ .

**Définition 2.4** Soit  $B$  un idéal non nul d'une algèbre de Malcev  $A$ . Si l'idéal  $J(B, A, A)$  satisfait pour un entier  $k$  supérieur ou égal à 1, la relation  $J(B, A, A)_{(A,k)} = \{0\}$ , on dira que  $B$  est  $J_k$ -nil dans  $A$ .

**Définition 2.5** Soient  $A$  une algèbre de Malcev et  $B$  un idéal de  $A$ . Soient  $a, b$  deux éléments de  $A$ . On dira que  $a$  et  $b$  sont égaux modulo  $B$  si leur différence est dans  $B$ .

**Définition 2.6** Soit  $n$  un entier naturel non nul. On pose par définition  $\mathbb{I}(n) = \{1, 2, \dots, n\}$ .

### 3 Produits droits dans l'algèbre de Malcev $A$

La preuve du lemme 3.1 se trouve dans [1], mais nous la reprenons.

**Lemme 3.1** Soit  $A$  une algèbre de Malcev de dimension finie et  $B$  un idéal de  $A$ . Posons  $B_0 = A$ ,  $B_1 = B$  et  $B_k = B^k + J(B, A, A)$  pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2 ;  $B_k$  est un idéal de  $A$  vérifiant  $B_k \supseteq B_{k+1}$ .

**Preuve :** Il est bien connu que  $J(B, A, A)$ ,  $B_0, B_1$  sont des idéaux. Supposons que pour un entier  $k \geq 2$ ,  $B_k$  soit un idéal, alors on a  $B_k.A \subseteq B^k + J(B, A, A)$ . Montrons que  $B_{k+1}$  est aussi un idéal. En effet on a ;

$$\begin{aligned} B_{k+1}.A &= (B^{k+1} + J(B, A, A)).A \\ &\subseteq B^{k+1}.A + J(B, A, A) \\ &\subseteq (B^k.B).A + J(B, A, A) \\ &\subseteq J(B^k, B, A) + (B.A).B^k + (A.B^k).B + J(B, A, A) \\ &\subseteq B.B^k + (B^k + J(B, A, A)).B + J(B, A, A) \\ &\subseteq B^{k+1} + J(B, A, A) = B_{k+1}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.1** Soient un produit droit  $P_0 = a_m a_{m-1} a_{m-2} \dots a_3 a_2 a_1$  et  $Q_0$  un produit quelconque de longueur  $m'$ . Posons pour tout entier  $0 \leq i \leq m-1$ ,

$$P_i = a_m a_{m-1} \dots a_{i+1} = \prod_{j=1}^{m-i} a_{m-j+1} \text{ et pour tout entier } 0 \leq r \leq m-2,$$

$Q_{r+1} = a_{r+1} Q_r$ . Alors :

$$T_m = Q_0 P_0 = \sum_{i=1}^{m-1} Q_{i-1} P_i a_i + Q_{m-1} a_m - \sum_{i=1}^{m-1} J(Q_{i-1}, P_i, a_i).$$

**Preuve :** Avant de faire la preuve fixons quelques définitions de produits :  
 $m$  désignera la longueur de  $P$ .

Posons pour  $1 \leq i \leq m-1$ ,  $Q'_{i-1} = Q_i$ ,  $a'_{m-i+1} = a_{m-i+2}$ . Nous avons alors,

$$P'_i = \prod_{j=1}^{m-i} a'_{m-j+1} = \prod_{j=1}^{m-i} a_{m-j+2} = \prod_{j=1}^{m+1-(i+1)} a_{m+1-j+1} = P_{i+1}.$$

Il est clair que si  $m = 2$ , on a :

$$T_2 = Q_0(a_2a_1) = Q_0a_2a_1 - Q_0a_1a_2 - J(Q_0, a_2, a_1), \text{ et si } m = 3 :$$

$$T_3 = Q_0(a_3a_2a_1)$$

$$= Q_0(a_3a_2)a_1 + a_1Q_0(a_3a_2) - J(Q_0, a_3a_2, a_1)$$

$$= Q_0(a_3a_2)a_1 + Q_1(a_3a_2) - J(Q_0, a_3a_2, a_1)$$

$$= Q_0(a_3a_2)a_1 + Q_1a_3a_2 + a_2Q_1a_3 - J(Q_1, a_3, a_2) - J(Q_0, a_3a_2, a_1)$$

$$= Q_0P_1a_1 + Q_1a_3a_2 + Q_2a_3 - J(Q_1, a_3, a_2) - J(Q_0, a_3a_2, a_1).$$

Posons en hypothèse que pour un produit  $P$  de longueur  $m$  on a :

$$T_m = \sum_{i=1}^{m-1} Q_{i-1}P_ia_i + Q_{m-1}a_m - \sum_{i=1}^{m-1} J(Q_{i-1}, P_i, a_i). \quad (1)$$

Alors on aura pour un produit  $P = a_{m+1}a_ma_{m-1} \cdots a_3a_2a_1$  de longueur  $m+1$  :

$$\begin{aligned} T_{m+1} &= Q_0 \prod_{k=1}^{m+1} a_{m-k+2} = Q_0 \left[ \prod_{k=1}^m a_{m-k+2} a_1 \right] \\ &= Q_0 \prod_{k=1}^m a_{m-k+2} a_1 + a_1 Q_0 \prod_{k=1}^m a_{m-k+2} - J \left( Q_0, \prod_{k=1}^m a_{m-k+2}, a_1 \right) \\ &= Q_0 \prod_{k=1}^m a_{m-k+2} a_1 + Q_1 \prod_{k=1}^m a_{m-k+2} - J \left( Q_0, \prod_{k=1}^m a_{m-k+2}, a_1 \right) \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que le produit  $T_{m+1}$  vaut,

$$T_{m+1} = Q_0 \prod_{k=1}^{m+1} a_{m-k+2} = Q_0 \left[ \prod_{k=1}^m a_{m-k+2} a_1 \right] \quad (2)$$

$$= Q_0(P'_0a_1) \quad (3)$$

$$= Q_0P'_0a_1 + Q_1P'_0 - J(Q_0, P'_0, a_1) \quad (4)$$

$$= Q_0P_1a_1 + Q'_0P'_0 - J(Q_0, P_1, a_1) \quad (5)$$

Par application de l'hypothèse de récurrence (1) à  $Q'_0P'_0$  (car  $P'_0$  est de longueur  $m$ ) :

$$\begin{aligned}
Q'_0 P'_0 &= \sum_{i=1}^{m-1} Q'_{i-1} P'_i a'_i + Q'_{m-1} a'_m - \sum_{i=1}^{m-1} J(Q'_{i-1}, P'_i, a'_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} Q_i P_{i+1} a_{i+1} + Q_m a_{m+1} - \sum_{i=1}^{m-1} J(Q_i, P_{i+1}, a_{i+1})
\end{aligned}$$

De l'équation (5), il vient que :

$$\begin{aligned}
T_{m+1} &= Q_0 P_1 a_1 + Q'_0 P'_0 - J(Q_0, P_1, a_1) \\
&= Q_0 P_1 a_1 + \left[ \sum_{i=1}^{m-1} Q_i P_{i+1} a_{i+1} + Q_m a_{m+1} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{m-1} J(Q_i, P_{i+1}, a_{i+1}) \right] - J(Q_0, P_1, a_1) \quad \square \\
&= \sum_{i=1}^m Q_{i-1} P_i a_i + Q_m a_{m+1} - \sum_{i=1}^m J(Q_{i-1}, P_i, a_i).
\end{aligned}$$

**Remarque 3.1** *Sous les hypothèses de la proposition 3.1 et en considérant le tableau suivant, il vient que :*

$P_{m-1} = a_m$	$P_{m-2} = P_{m-1} a_{m-1}$	$\cdots$	$P_{i-1} = P_i a_i$	$\cdots$
$Q_{m-1} = a_{m-1} Q_{m-2}$	$Q_{m-2} = a_{m-2} Q_{m-3}$	$\cdots$	$Q_{i-1} = a_{i-1} Q_{i-2}$	$\cdots$

$\cdots$	$P_{i+j} = P_{i+j+1} a_{i+j+1}$	$\cdots$	$P_2 = P_3 a_3$	$P_1 = P_2 a_2$	$P_0 = P_1 a_1$
$\cdots$	$Q_{i+j} = a_{i+j} Q_{i+j-1}$	$\cdots$	$Q_2 = a_2 Q_1$	$Q_1 = a_1 Q_0$	$Q_0 = Q_0$

L'ensemble  $\Lambda = \{(a_i)_{1 \leq i \leq m}, (b_j)_{1 \leq j \leq m'}\}$  est l'ensemble des facteurs distincts ou non qui donne le produit  $P$ . On vérifie facilement qu'il donne également les produits  $Q_{k-1} P_k a_k, Q_{m-1} a_m$  où  $k \in \mathbb{I}(m-1)$ . Il vient alors que pour  $k \in \mathbb{I}(m-1)$  :

$$\#(P) = \#(Q_{k-1}) + \#(P_k) + 1 \quad (6)$$

$$\#_B(P) = \#_B(Q_{k-1}) + \#_B(P_k) + \#_B(a_k) \quad (7)$$

$$\#(P) = \#(Q_{m-1}) + 1 \quad (8)$$

$$\#_B(P) = \#_B(Q_{m-1}) + \#_B(a_m). \quad (9)$$

**Lemme 3.2** *Tout produit  $T$  de longueur  $m$  dans une algèbre de Malcev  $A$  de dimension finie est combinaison linéaire de produits droits de longueur  $m$  modulo l'idéal  $J(A, A, A)$ .*

**Preuve :** Procédons par récurrence sur la longueur  $m$ . Lorsque la longueur  $m$  est inférieure ou égale à 3, c'est évident que le résultat est vrai. Supposons alors la relation vraie pour tout produit de longueur strictement inférieure à  $m \geq 4$ .

Nous ferons la démonstration en considérant  $T$  comme un produit  $Q_0P_0$  avec  $P_0$  un produit droit de longueur  $n > 1$ .

Regardons ce qui se passe avec un produit  $T = Q_0P_0$  de longueur  $m > n$ . Alors d'après la proposition 3.1,

$$T = Q_0P_0 = \sum_{i=1}^{n-1} Q_{i-1}P_i a_i + Q_{n-1}a_n - \sum_{i=1}^{n-1} J(Q_{i-1}, P_i, a_i).$$

Les produits suivants  $Q_{i-1}P_i$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et  $Q_{n-1}$  sont des produits de longueur égale à  $m-1$  et sont donc des combinaisons linéaires de produits droits de longueur  $m-1$  modulo l'idéal  $J(A, A, A)$ . Ceci montre que  $T$  est combinaison linéaire de produits droits de longueur  $m$  modulo l'idéal  $J(A, A, A)$ .  $\square$

## 4 Produits droits de poids $n$ dans un idéal $B$

**Lemme 4.1** *Tout produit de longueur  $m$  et de poids  $n$  relativement à  $B$  dans une algèbre de Malcev est combinaison linéaire de produits normaux de longueur  $m$  et de poids  $n$ .*

**Preuve :** Le lemme est évident si la longueur  $m$  du produit est inférieure ou égale à trois. Si  $m = 4$ , alors il existe quatre éléments  $a_1, a_2, a_3, a_4$  dans  $A$  tels que  $P$  est égal à l'une des combinaisons de produits droits suivants :

$$a_4 a_3 a_2 a_1 \text{ et } (a_4 a_3)(a_2 a_1) = a_4 a_3 a_2 a_1 + a_1 a_4 a_3 a_2 + a_2 a_1 a_4 a_3 + a_3 a_2 a_1 a_4.$$

Supposons le lemme vrai pour tout produit de longueur inférieure ou égal à  $m$ . Soit  $P$  un produit de longueur  $m+1$ . Alors  $P$  s'écrit :

Soit  $P_0 a_0$  avec la longueur de  $P_0$  égal à  $m$ ,

Soit  $(P_4 P_3)(P_2 P_1) = P_4 P_2 P_3 P_1 + P_1 P_4 P_2 P_3 + P_3 P_1 P_4 P_2 + P_2 P_3 P_1 P_4$  avec la longueur de chaque  $P_i$  dans  $\mathbb{I}(m-1)$ .

L'hypothèse de récurrence montre que  $P_0, P_4 P_2 P_3, P_1 P_4 P_2, P_3 P_1 P_4, P_2 P_3 P_1$  sont combinaisons linéaires de produits normaux conservant les longueur et poids initiaux. Ainsi  $P$  l'est aussi. Il est évident que par construction des termes la longueur et le poids de  $P$  sont conservés par chacun des termes.  $\square$



**Lemme 4.2** Soient  $A$  une algèbre de Malcev et  $B$  un idéal non nul de  $A$ . Tout produit  $T$  de  $A$  de longueur  $m \geq 1$  et de poids  $n \geq 1$  relativement à  $B$  est combinaison linéaire de produits droits de longueur  $m$  et de poids  $n$  relativement à  $B$ , modulo l'idéal  $J(B, A, A)$ .

**Preuve :** Le lemme est évident si  $T$  est de longueur  $m \leq 3$ .

Posons l'hypothèse suivante : la relation est vraie pour tout produit  $T$  dont la longueur est strictement inférieure à  $m$ .

Soit  $Q_0P_0$  un produit normal de poids  $n$  relativement à  $B$  et de longueur  $m = p' + p$  où  $Q_0$  (respectivement  $P_0$ ) est un produit droit de longueur  $p'$  (respectivement  $p$ ). Alors d'après la proposition 3.1,

$$Q_0P_0 = \sum_{i=1}^{p-1} Q_{i-1}P_i a_i + Q_{p-1}a_p - \sum_{i=1}^{p-1} J(Q_{i-1}, P_i, a_i).$$

Les produits  $Q_{i-1}P_i$ ,  $Q_{p-1}$  (où  $1 \leq i \leq p-1$ ) sont des produits de longueur égale à  $m-1$ .

Ils sont donc des combinaisons linéaires de produits droits de longueur  $m-1$  modulo l'idéal  $J(B, A, A)$ .

D'où  $Q_0P_0$  est combinaison linéaire de produits droits de longueur  $m$  modulo l'idéal  $J(B, A, A)$ .

Grace aux équations 6-9, il est clair que pour  $i \in \mathbb{I}(p-1)$ , le poids relativement à  $B$  du produit normal  $Q_{i-1}P_i a_i$  est  $n$ . Il en est de même pour le poids du produit  $Q_{p-1}a_p$ , relativement à  $B$ .  $\square$

**Lemme 4.3** Soient  $A$  une algèbre de Malcev  $A$  de dimension finie et  $B$  un idéal non nul de  $A$ . Soit  $P_0 = a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_3 a_2 a_1$  un produit droit de longueur  $m$  et de poids supérieur ou égal à  $n \geq 1$ , relativement à  $B$ . Alors  $P_0$  appartient à l'idéal  $B_n$ .

**Preuve :** Soit  $\sigma$  une injection croissante de  $\mathbb{I}(n)$  dans  $\mathbb{I}(m)$  telle que pour tout  $j \in \mathbb{I}(n)$ ,  $a_{\sigma(j)} \in B$ . Posons pour tout entier  $1 \leq j \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} Q'_0 &= a_m a_{m-1} \cdots a_{\sigma(n)+1}, \\ Q_j &= Q'_{j-1} a_{\sigma(n-j+1)}, \\ Q'_j &= Q_j a_{\sigma(n-j+1)-1} \cdots a_{\sigma(n-j)+1}, \\ Q_n &= Q'_{n-1} a_{\sigma(1)} \cdots a_1. \end{aligned}$$

Il est clair que,  $Q_1 \in B^1 \subseteq B^1 + J(B, A, A) = B_1$  et  $Q'_1 \in B$  ;  
 $Q_2 = Q'_1 a_{\sigma(n-j+1)} \in B.B \subseteq B^2 + J(B, A, A) = B_2$ .  
 Supposons que pour  $1 \leq j < n$ ,  $Q_j \in B_j = B^j + J(B, A, A)$  et montrons que

$$Q_{j+1} \in B_{j+1} = B^{j+1} + J(B, A, A).$$

En exploitant l'hypothèse, on a que

$$Q'_j = Q_j a_{\sigma(n-j+2)-1} \cdots a_{\sigma(n-j+1)+1} \text{ appartient à l'idéal } B_j. \text{ Par suite}$$

$$Q_{j+1} = Q'_j a_{\sigma(n-j+1)} \in B_j \cdot B \subseteq B^{j+1} + J(B, A, A) = B_{j+1}.$$

$$\text{Alors } P_0 = Q_n \in B_n.$$

□

□

**Lemme 4.4** Soient  $A$  une algèbre de Malcev de dimension finie et  $B$  un idéal  $J_k$ -nil dans  $A$ . Soit  $\ell$  un entier supérieur ou égale à  $k$ . Soit un produit droit  $P = a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_3 a_2 a_1$  de longueur  $m$  et de poids  $n$  supérieur ou égal à  $2\ell$ , relativement à  $B$ . Alors  $P \in B_{(A,k)}^\ell$ .

**Preuve :** Le produit droit  $Q = a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_{k+1}$  est de poids supérieur ou égal à  $\ell$ , en effet posons  $n'$  le poids de  $Q$  et  $n''$  le poids de  $a_k \cdots a_3 a_2 a_1$ . On a  $0 \leq n'' \leq k$  et l'égalité  $P = Q a_k \cdots a_3 a_2 a_1$  nous donne  $n' \leq n \leq k + n'$ . Ainsi  $n' \geq n - k \geq 2\ell - k \geq \ell$ . Le lemme 4.3 nous dit que  $Q \in B_\ell$ . Ainsi  $P = Q a_k \cdots a_3 a_2 a_1 \in (B_\ell)_{(A,k)} = (B^\ell + J(B, A, A))_{(A,k)} = B_{(A,k)}^\ell$  car  $B$  est un idéal  $J_k$ -nil dans  $A$ . □

**Lemme 4.5** Soit  $B$  un idéal  $J_k$ -nil de l'algèbre de Malcev  $A$ . Soit  $P$  un produit de poids  $t \geq 4k^2 - 2k + 1$ , relativement à l'idéal  $B$ . Alors  $P$  est combinaison linéaire de produits normaux  $Q_j$  ( $P = \sum_{j \text{ fini}} \mu_j Q_j$ ) tels que, pour  $j$  fixé on a  $Q_j$  est dans  $(B^k)_{(A,k)}$  ou comporte au moins un facteur dans  $(B^k)_{(A,k)}$ .

**Preuve :** Soient  $k > 1$  et  $t \geq 4k^2 - 2k + 1$ . D'après le lemme 4.1, tout produit  $P$  de poids supérieur ou égal à  $t$  est combinaison linéaire de produits normaux de poids supérieur ou égal à  $t$ . Soit  $P = \sum_j \mu_j Q_j$  où  $Q_j$  est un produit normal de poids supérieur ou égal à  $t$ .

Pour  $j$  fixé on a  $Q_j = S_{j,p} S_{j,p-1} \cdots S_{j,1}$  où  $S_{j,i}$  est un produit droit (avec  $p$  le nombre de facteurs  $S_{j,i}$  de  $Q_j$ ).

- Si un des produits droits  $S_{j,i_0}$  possèdent un poids supérieur ou égal à  $2k$ , alors  $S_{j,i_0}$  appartient à  $(B^k)_{(A,k)}$  d'après le lemme 4.4. Et alors  $Q_j$  possède un facteur dans  $(B^k)_{(A,k)}$ .
- Sinon, tous les facteurs  $S_{j,i}$  possèdent un poids strictement inférieur à  $2k$ . Soit  $q$  le nombre de facteurs  $S_{j,i}$  ayant un poids supérieur ou égal à 1. On a alors  $q(2k - 1) \geq t = 4k^2 - 2k + 1$ . Par suite  $q > 2k$ . Remplaçons chacun des produits  $S_{j,i}$  par sa valeur

$s_{j,i} = S_{j,i} \in A$ . Lorsque le poids de  $S_{j,i}$  est supérieur ou égal à 1, on a  $s_{j,i} \in B$ . Ainsi  $Q_j$  se met sous la forme  $Q_j$  se met sous la forme d'un produit droit  $s_{j,p} s_{j,p-1} \cdots s_{j,1}$  de longueur  $p$  et de poids  $q$  dans  $B$ . Comme  $q \geq 2k$ , on a  $Q_j \in (B^k)_{(A,k)}$  d'après le lemme 4.4.

Cela achève la démonstration.  $\square$

Par un abus de langage, on dira que  $Q_j$  possède un facteur dans  $(B^k)_{(A,k)}$  si (cf. les cas cités dans la preuve précédente) :

- un des produits droits  $S_{j,i_0}$  appartient à  $(B^k)_{(A,k)}$ ,
- on a  $Q_j \in (B^k)_{(A,k)}$ .

## 5 Théorème principal

**Théorème 5.1** *Soient  $K$  un corps commutatif de caractéristique différente de 2,  $A$  une  $K$ -algèbre de Malcev et  $B$  un idéal  $J_{k'}$ -nil de Malcev  $A$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$B$  est nilpotent à droite ;*
- (ii)  *$B$  est nilpotente ;*
- (iii)  *$B$  est fortement nilpotente. ;*

**Preuve :** En effet, pour tout entier  $k > 1$ , les inclusions d'espaces vectoriels  $B^k \subseteq B^{\{k\}} \subseteq B^{(k)}$  nous montrent que (iii)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (i).

Par ailleurs, supposons qu'il existe un entier  $\ell' \geq 1$  tel que  $B^{\ell'} = \{0\}$ . Posons  $k = \max\{k', \ell'\}$ , alors pour  $\ell = 4k^2 - 2k + 1$ , le lemme 4.5 nous dit que tout produit  $P$  de poids  $\geq \ell = 4k^2 - 2k + 1$ , relativement à l'idéal  $B$  est combinaison linéaire de produits normaux dont chacun comporte au moins un facteur dans  $(B^k)_{(A,k)} \subseteq (B^{k'})_{(A,k)} = \{0\}$ . Il s'ensuit que  $P = 0$  et ainsi  $B^{(\ell)} = 0$ . Prouvant ainsi que (i)  $\Rightarrow$  (iii).  $\square$

**Corollaire 5.1** *Soient  $K$  un corps commutatif de caractéristique différente de 2,  $A$  une  $K$ -algèbre de Malcev, Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$A$  est nilpotent à droite ;*
- (ii)  *$A$  est nilpotente ;*
- (iii)  *$A$  est fortement nilpotente.*

**Preuve :** Remarquons d'abord que l'idéal  $J(A, A, A)$  de  $A$  est inclus dans  $A^3$ . Supposons que la condition (i) est vérifiée et montrons (iii).

Il existe donc un entier  $\ell' > 1$  tel que  $\{0\} = A^{\ell'}$ , par suite

$$J(A, A, A) \underbrace{AAA \dots A}_{\ell' \text{ facteurs}} \subseteq (A^3) \underbrace{AAA \dots A}_{\ell' \text{ facteurs}} \subseteq A^{\ell'+3} = \{0\}. \text{ Ainsi } A \text{ est } J_{\ell'} - \text{nil}.$$

En s'appuyant sur la preuve du théorème 5.1, il vient que (i)  $\Rightarrow$  (iii).

Bien entendu, (iii)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (i) du fait des inclusion de sous espaces vectoriels :  $B^k \subseteq B^{\{k\}} \subseteq B^{\langle k \rangle}$ .  $\square$

## References

- [1] Côme J. A. BÉRÉ, Superalgèbres de Malcev, thèse de 3<sup>ième</sup> cycle, Université de Ougadougou, 1997.
- [2] Côme J. A. BÉRÉ, M. Françoise OUEDRAOGO and Nakelgbamba B. PILABRÉ, On the existence of ad-nilpotent elements, Afr. Mat. (2015) 26:813-823 DOI 10. 1007/s13370-014-0246-y.
- [3] J. A. BÉRÉ Côme, PILABRÉ N. Boukary and KOBMBAYE Aslao, Lie's theorems on soluble Leibniz algebras. British journal of Mathematics & Computer Science (2014) 4(18): p. 2570-2581.
- [4] Ch. GERLEIN et A. MICALI, Sur la nilpotence dans les algèbres de Malcev, C. R. Ac. Sc. Paris, 286(1978), 1091-1094.
- [5] Ch. GERLEIN et A. MICALI, Sur la nilpotence dans les algèbres de Malcev II (non publié).
- [6] A. KOULIBALY, Contribution à la théorie des algèbres de Malcev, thèse de Doctorat d'Etat, Université de Montpellier, 1984.
- [7] A. K. ABD EL MALEK, Sur les algèbres de Malcev, thèse de Doctorat d'Etat, Université de Montpellier, 1985.
- [8] I. SHESTAKOV, Lettre du 19 juin 1979 à Ch. GERLEIN et A. MICALI.